Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos[1]

*NEPEM/USF**

Resumo
O presente trabalho se propõe a analisar a abordagem dada aos números racionais em livros didáticos do ensino fundamental sob três aspectos: os subconstrutos do conceito de racional, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. Na parte dos subconstrutos são identificados quais deles e de que forma são abordados nesses livros. Referente à linguagem, a análise se propõe a observar o uso que os autores fazem desta com o objetivo de aproximá-la da linguagem formal matemática. Sobre os materiais manipulativos, a análise se pautou na identificação e formas de abordagem quanto ao seu uso no desenvolvimento dos subconstrutos dos números racionais. A análise tem como eixo condutor os estudos de Behr et al. (1983), complementada por Romanatto (1997, 1999), Niven (1984) e Post (1981).
Palavras-chave: Número racional; Linguagem; Materiais manipulativos.

Rational numbers: Conceptual aspects, the role of language and of manipulative aids

Abstract
This paper proposes an analysis on about the approach given by schoolbooks to rational numbers, under three aspects: the rational subconstructs, the role of language and of manipulative aids. In relation to subconstucts, they are identified and the form presentation of them is analyzed. About language, the analysis observes the authors language use with the objective to do approximations with mathematical formal language. The analysis is based on Behr et al. studies (1983), the studies of Romanatto (1997,1999), Niven (1984) and Post (1981).
Keywords: Rational number; Language; Manipulative aids.

Introdução

O Nepem (Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática) está vinculado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco e é composto por professores do programa, alunos da pós-graduação e da graduação e professores da rede pública de ensino.

Dentre os estudos desenvolvidos pelo grupo, em 2003, um deles se referiu à reflexão sobre o ensino dos números racionais. Tal reflexão teve origem em uma aula videogravada de uma professora de terceira série do ensino fundamental. Várias questões foram levantadas a partir dessa aula, o que gerou a discussão sobre a abordagem do número racional. Dentre as questões elencadas, uma delas focou a questão conceitual: o que o grupo estava entendendo por fração – objeto da aula da professora? Partindo dessa indagação, o grupo buscou referenciais teóricos sobre essa temática.

Inicialmente, discutimos o texto de David e Fonseca (1997), em que as autoras apontam as idéias relacionadas ao número racional, destacando a representação fracionária. Diante dos pontos apresentados pelas autoras, decidimos buscar uma maior compreensão dessas idéias relativas ao número racional, tomando como referência os diferentes tratamentos dados pelos autores de materiais didáticos. Num primeiro momento, o grupo tomou contato com uma série de materiais existentes no mercado: livros didáticos, materiais apostilados, materiais desenvolvidos para classes de aceleração e textos de telecursos.

Percebemos, nesse primeiro contato, que os diferentes enfoques se apresentavam bastante difusos, o que nos suscitou a necessidade de um maior aprofundamento teórico. Remetemo-nos, então, ao texto de Romanatto (1999), que, de certa forma, apresenta uma ampliação das questões apontadas por David e Fonseca (1997). Constatamos que ambos faziam referência a Behr et al. (1983).

Assumindo as posições teóricas de Behr et al. (1983) quanto aos subconstrutos[2] dos números racionais, o papel da linguagem e o papel dos materiais manipulativos na formação do conceito de número racional, iniciamos um estudo mais aprofundado sobre a temática.

* NEPEM: Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática: Adair Mendes Nacarato, Alexandrina Monteiro, Ivete Cevallos Soares, Jackeline Rodrigues Mendes, José Antonio Araújo Andrade, Luana Toricelli, Marco Aurélio Fonseca, Paulo César Penha, Paulo Henrique Trentin, Regina Célia Grando, Renato Tim dos Santos e Sílvia Maria Caporale.
Endereço para correspondência:
E-mail: rodrigues@mpc.com.br

Esse estudo nos motivou a um retorno aos livros didáticos com o objetivo de analisarmos as abordagens dadas às frações e aos números racionais pelos autores desses livros, fazendo uso, para tanto, da perspectiva apresentada por Behr (Behr et al., 1983). Para essa análise, optamos por três coleções de autores que apresentam um trabalho já bem conceituado na produção de materiais para o ensino fundamental: Imenes (2001, 2002), Pires (1998, 2002) e Bigode (2000).[3]

A análise partiu dos aspectos apontados em Behr et al. (1983) relacionados aos subconstrutos do conceito de racional, ao papel da linguagem e ao uso dos materiais manipulativos. O grupo procedeu a uma análise e fichamento das coleções, fazendo a leitura detalhada do livro de cada série, de forma a obter uma visão longitudinal de como os autores abordam os números racionais no decorrer das séries do ensino fundamental. Para esse trabalho houve uma subdivisão do grupo, tendo cada subgrupo ficado responsável pela análise de um desses aspectos. Periodicamente o grupo todo se reunia com vistas a discussões relativas ao andamento do trabalho e apreciação dos textos produzidos pelos subgrupos.

Procuramos identificar quais e de que forma os subconstrutos são abordados nos materiais didáticos, observar a linguagem utilizada pelos autores ao longo das séries, identificando as aproximações da língua materna com a linguagem formal matemática, bem como identificar os materiais manipulativos propostos e suas formas de abordagem. A análise teve como eixo condutor os estudos de Behr et al. (1983), complementada por Romanatto (1997, 1999), Niven (1984) e Post (1981).

Os subconstrutos dos números racionais

Parece haver consenso entre os diferentes pesquisadores de que os significados centrais ao estudo de frações/números racionais são: quociente, razão, operador e relação parte–todo. No entanto, segundo Romanatto (1997), é difícil conciliar as análises que esses diferentes pesquisadores fazem em relação a essa temática, visto que tais análises podem se pautar em critérios diferenciados. Para a presente discussão nos apoiaremos em Behr et al. (1983) e Romanatto (1997, 1999). Enquanto os primeiros autores referem-se às diferentes interpretações do número racional como *subconstrutos*, Romanatto as denomina "personalidades, idéias ou construtos" (p. 71). Constatamos que ambos os trabalhos têm como principal sustentação teórica os estudos de Kieren (apud Behr et al., 1983).

Os trabalhos de Kieren (1976, 1981) apontam a existência de cinco construtos para o número racional: relação parte–todo, medida, quociente, razão e operador. Behr et al. (1983, p. 99) redefinem e subdividem os construtos apontados por Kieren, denominando-os subconstrutos e obtendo um total de sete: *medida fracionária,* representando uma *reconceitualização da noção parte–todo de fração; razão; taxa de número racional; quociente; coordenada linear; decimal do número racional e operador.*

Discutiremos cada um desses subconstrutos na ótica de Behr et al. tomando como dado de análise a forma como os autores de livros didáticos – por nós selecionados – abordam a temática. Nem sempre a análise se centrará em subconstrutos isolados, principalmente quando esses estiverem imbricados conceitualmente.

A relação parte–todo e medida

Behr et al. (1983) entendem que o subconstruto parte–todo, aplicado em quantidades contínuas e discretas, constitui a base fundamental para a construção do conceito de número racional, ou seja, todos os outros subconstrutos têm neste o seu ponto de partida.

Este subconstruto geralmente é introduzido ao aluno desde seu primeiro contato com frações. Nele, segundo Kieren (apud Behr et al., 1983, p. 93), está subjacente a idéia de medida. Isso ocorre porque os modelos de regiões geométricas e retas numéricas são as representações mais comuns no ensino. Enquanto a interpretação de regiões geométricas envolve noções de área, a reta numérica envolve as noções de unidade de medida de comprimento.

Na reclassificação de Behr et al. (1983), a reta numérica se torna um subconstruto independente denominado "*coordenada linear de número racional*" – a ser discutido posteriormente.

A análise dos livros didáticos – objeto deste estudo – revela a intensidade com que o subconstruto relação parte–todo é abordado no ensino fundamental. Nos livros de Imenes este subconstruto aparece desde a 3ª série, sendo discutido/retomado até a 7ª série. A abordagem dada por Pires é semelhante, estendendo-se, contudo, apenas até a 6ª série. No livro de Bigode, esse subconstruto é explorado apenas no livro da 5ª série. Nas três coleções, o trabalho ocorre simultaneamente com quantidades discretas e contínuas.[4]

Constatamos que, nessas obras, o ponto de partida para o estudo das frações se dá com grandezas contínuas. No entanto, Hiebert e Tonnessem (apud Behr et al., 1983, p. 94), em seus estudos, concluíram que as crianças têm melhor desempenho em atividades envolvendo quantidades discretas. Ou seja, notaram que a repartição de um todo discreto é mais fácil que o contínuo ao se iniciar a abordagem do subconstruto parte–todo. Isso se dá porque *as tarefas discretas podem ser resolvidas sem o tratamento do conjunto como um todo e sem antecipar a solução final* (p. 94-95), enquanto tarefas com quantidades contínuas requerem um esquema antecipatório bem desenvolvido, não podendo muitas vezes ser resolvidas com uma simples partição. Por exemplo, para determinar 1/5 de uma coleção com 10 objetos (conjunto discreto), o aluno pode manipular esses objetos sem modificar o conjunto; por outro lado, para determinar 1/5 de uma tira de papel, o aluno necessita antecipar a solução, antes de modificar o conjunto inicial.

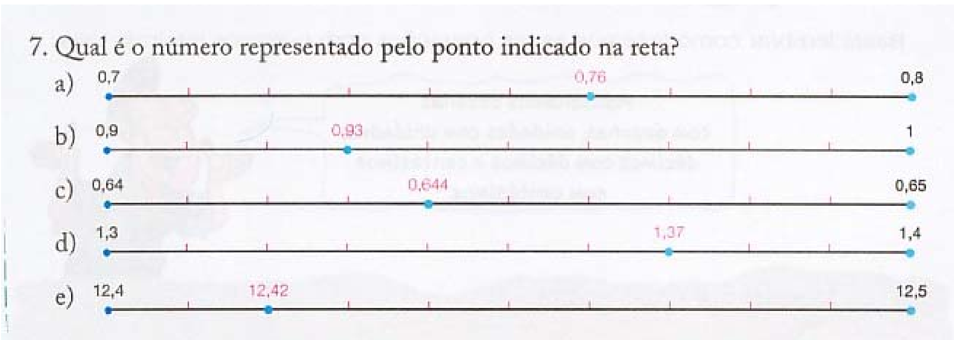
O subconstruto coordenada linear

O subconstruto coordenada linear foi identificado apenas nos estudos de Behr et al. (1983). Como os próprios pesquisadores admitem, sua interpretação é bastante próxima da noção de medida de Kieren, enfatizando a questão intervalar, a densidade e a descontinuidade. Desta forma, os números racionais são interpretados como pontos sobre uma reta numérica.

Nos livros analisados constatamos que a reta numérica é abordada por todos os autores. Na obra de Imenes tal noção é apresentada pela primeira vez na 4ª série, num contexto de percurso (p. 94), sem relacioná-lo com a reta em si. A reta numérica reaparece na 7ª série, na forma de um único exercício. Esse subconstruto é sistematizado na 8ª série, no capítulo 13: Classificação dos números. Nesse capítulo, há um item específico: reta numérica, em que o assunto é discutido com o aluno, mostrando sua relação com os gráficos e explorando a densidade dos números racionais e, ao mesmo tempo, ampliando os campos numéricos para os irracionais e reais.

Na coleção de Pires, a reta numérica é apresentada na 3ª série, no capítulo 14 (exercício 36), em que o aluno precisa descobrir a metade entre dois números naturais. Na 4ª série, esse subconstruto aparece no capítulo 10, no qual são exploradas noções de densidade. Essas noções já são explicitadas no próprio título do capítulo: *Oito ou oitenta: mais decimais*. Tal subconstruto é retomado na 7ª série (módulo 1), na discussão sobre os campos numéricos. Nesse momento, discute-se também a densidade do conjunto dos números racionais. Na 8ª série há uma retomada em forma de exercícios.

Na coleção de Bigode, esse subconstruto aparece na 5ª série (capítulo 11), no item denominado *As frações e a reta numérica*. No entanto, a reta aparece restrita apenas ao intervalo de zero a 1. No capítulo seguinte (*Os números decimais*), a reta é trabalhada apenas em atividades, e no item 7 são apresentados cinco segmentos, todos com o mesmo comprimento. Enquanto em quatro deles esse comprimento é de 1 décimo, em um deles tal comprimento é de 1 centésimo, como indicado na figura a seguir (Bigode, 2000, p. 225):



Acreditamos que essa abordagem não contribui para a compreensão da reta numérica, visto que as unidades de medida utilizadas estão em escalas diferentes (1 décimo e 1 centésimo) e utiliza apenas o segmento de reta e denomina-o de reta. Além disso, notamos que há uma tentativa do autor em ressaltar a densidade do conjunto dos números racionais, mostrando que num intervalo qualquer, sempre é possível localizar infinitos pontos de coordenadas decimais. No entanto, o fato de apresentar o intervalo isoladamente acaba por confundir, possivelmente, as questões intervalares, apontadas por Kieren (apud Behr, 1983), para a compreensão do número racional como uma coordenada linear.

O assunto é retomado na 6ª série (p. 68-69), quando, na exploração do subconstruto quociente, há contextos de reta numérica, tanto de números racionais na representação decimal quanto na fracionária. À página 78, num contexto da multiplicação de um número natural por um número racional na forma fracionária – adição de parcelas iguais –, o autor comete o mesmo descuido com o tamanho do intervalo da reta numérica: dois segmentos de mesmo comprimento representam ora 2 unidades, ora 1 unidade. Na 8ª série, na sistematização dos conjuntos numéricos (capítulo 1), retoma-se a reta numérica com a discussão da densidade do conjunto dos números racionais (item: *Sempre cabe mais um*).

A análise das três coleções revelou que o subconstruto coordenadas lineares raramente é trabalhado, o que no nosso entender, deveria merecer o mesmo destaque que a relação parte–todo. Ele aparece, esporadicamente, em forma de exercícios, ao longo das séries, ocorrendo uma discussão mais formalizada na 7ª e/ou 8ª série, momento em que os diferentes autores discutem também a noção de densidade do conjunto dos números racionais.

Se, por um lado, defendemos a não-sistematização precoce de alguns subconstrutos, por outro, acreditamos que um trabalho exploratório com a reta numérica deveria estar mais presente em todas as séries do ensino fundamental. Segundo pesquisas realizadas por Novillis-Larson (apud Behr et al., 1983), o modelo representacional da reta numérica contém atributos que não se encontram presentes em outros modelos, como aqueles relacionados a áreas – mais comuns no estudo das frações –, principalmente quando na reta está indicado mais de um intervalo. Neste caso, os resultados dessas pesquisas apontam que os alunos têm dificuldades na percepção da unidade de referência, considerando, na maioria dos casos estudados, a reta inteira como unidade.

Além disso, defendemos ainda que tal subconstruto é fundamental para a representação gráfica em sistemas de eixos coordenados, visto que esta representação exige, muitas vezes, a localização de pontos de coordenadas não inteiras. A ausência de um trabalho pedagógico mais sistemático pode ser indicativa das dificuldades que os alunos, em níveis de ensino mais avançados, encontram ao se depararem com as coordenadas de um ponto expressas em números racionais (fracionários ou decimais).

O subconstruto quociente

Para Behr et al. (1983, p. 99-100), o subconstruto quociente consiste na representação de uma divisão **a : b**, na forma a/b, ou seja, *a* dividido por *b*, quando inserido em um determinado contexto como, por exemplo: *"Existem 4 bolachas e 3 crianças. Se as bolachas são partidas igualmente entre as três crianças, quanto cada criança receberá?"*.

Nos livros didáticos analisamos em quais momentos esse subconstruto é trabalhado. Imenes o aborda somente nas três últimas séries do ensino fundamental. Em Pires essa abordagem ocorre na 3ª série, em situações de divisão de folhas e de chocolates entre crianças; na 4ª série, na relação da divisão com a fração e, na 5ª série, em um texto explicativo na seção *"É preciso saber"* (módulo 13), no qual são sistematizados os subconstrutos relação parte–todo e quociente. Vale destacar que esta obra é a única que contém um texto explicativo destinado ao aluno sobre os diferentes significados e representações da fração.

Ainda com relação a esse subconstruto, Bigode (2000) o aborda em duas séries: 6ª e 8ª. Na 6ª (p. 67), há a afirmação de que em muitas situações as frações são usadas para indicar uma divisão. No entanto, não identificamos nesse volume situações em que a divisão seja associada à fração, mas apenas ao número decimal. Um exemplo a ser destacado: 18 : 12 = 1,5 = 15/10. Pode-se observar que nessa igualdade a divisão está relacionada ao número decimal e este, por sua vez, à fração. Assim, a relação entre a divisão e a fração é deixada para o aluno estabelecer sozinho. Mesmo em momentos posteriores não se discute o significado dessa igualdade/equivalência, nem se relaciona a fração com a divisão. Vale destacar que, nesse momento, o autor informa ao aluno que o resultado da divisão é chamado de número racional (p. 68). Nos momentos posteriores, o autor ora utiliza a expressão "números racionais", ora "frações", como, por exemplo, à página 71, em que aparece o subtítulo: *Adição e subtração com frações*, havendo o seguinte convite ao aluno no primeiro parágrafo da seção: *Vamos agora ver a adição e a subtração de números racionais utilizando esquemas geométricos*. O autor opta por explorar esse subconstruto na representação decimal utilizando a calculadora. Tal subconstruto reaparece na 8ª série (capítulo 1, unidade 1) quando o autor sistematiza os diferentes conjuntos numéricos.

Tal análise nos revelou que o subconstruto quociente, também fundamental para a compreensão do número racional em sua representação a/b, não recebe desses autores de livros didáticos o tratamento adequado. É provável que a grande dificuldade encontrada por alguns alunos em interpretar a fração a/b como um número seja conseqüência da forma como o subconstruto quociente vem sendo trabalhado em sala de aula. Cabe ao professor a tarefa de complementar o tratamento adequado a esse subconstruto.

O subconstruto razão de um número racional

Behr et al. (1983) consideram o subconstruto razão de um número racional a relação expressa entre duas quantidades de uma mesma espécie. Por exemplo, a razão entre as quantidades de meninos e meninas de uma sala de aula.

Nas coleções analisadas, observamos que Imenes (2002) trabalha o conceito de razão somente na 6ª série e na 8ª série. Na 6ª série, tal conceito aparece no contexto de cálculos de: PIB, consumo médio de combustível de um automóvel, densidade demográfica e porcentagem. O autor define a razão como uma divisão entre dois números (p. 152). Na 8ª série esse subconstruto é trabalhado como a medida da chance ou a probabilidade de ocorrência de um certo resultado (p. 95). No dicionário, ao final desses dois volumes, o autor afirma que:

a expressão **na razão de** *é equivalente a* **na proporção de**, e na 8ª série, os significados do termo razão são ampliados, definindo-se: "Razão: noção relacionada com a comparação de duas quantidades por meio da divisão. A palavra 'razão' vem do latim *ratio*, que significa divisão. [...] A escala de um mapa é também uma razão" (p. 342).

Pires (2002) aborda esse subconstruto apenas na 5ª e 7ª série. Na 5ª série, este é explorado no módulo sobre proporcionalidade (módulo 14), em situações-problema. Somente no manual do professor há orientações segundo as quais esses contextos envolvem o conceito de razão. Tal conceito havia sido definido no módulo 13, no próprio manual do professor: "[...] uma interpretação diferente das anteriores é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como razão" (p. 39). Vale destacar que os autores incluem nesse subconstruto: índice comparativo, probabilidade e escala. Na 7ª série, tal subconstruto reaparece no módulo 20 no trabalho com escalas. Na seção *É preciso saber* a escala é definida como uma razão.

Bigode (2000) também trabalha esse subconstruto em duas séries, 5ª e 6ª. Na 5ª série essa noção aparece em um único exercício (p. 197), mas sem nenhuma discussão – nem mesmo no manual do professor – sobre o subconstruto razão. Na 6ª série, a razão é trabalhada no capítulo relativo à proporcionalidade e é definida como o quociente entre dois números inteiros. O autor apresenta como exemplos de razão a densidade demográfica, a densidade de um corpo, escala e taxa percentual (p. 218). Vale destacar que, nessa mesma página, há a informação de que a razão é uma relação expressa por *a/b, onde a e b são números racionais e b é diferente de zero*. Vê-se, assim, que numa mesma página o subconstruto quociente ora envolve números inteiros, ora números racionais. Além disso, como ficam as razões trigonométricas, como por exemplo, sen 60° = $\sqrt{3}/2$? Pela definição apresentada pelo autor, esse valor deixaria de ser uma razão.

Constatamos a não-existência de um consenso entre os diferentes autores no que diz respeito à definição de razão.

Os autores de livro didático, aqui analisados, não partilham da definição de Behr et al. (1983), que consideram o subconstruto razão de um número racional como a relação expressa entre duas quantidades de uma mesma espécie. Em nenhum livro didático há a ressalva de que esta relação deva ser estabelecida entre grandezas de mesma espécie.

Ocorre que Behr et al. discutem o subconstruto taxa de número racional diferenciado de razão, como um outro subconstruto, ou seja, a taxa de número racional define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades (p. 99), que não necessariamente são da mesma espécie. Behr et al. citam como exemplo de taxa a velocidade como relação entre distância e tempo.

Nos livros didáticos analisados, a taxa aparece como razão, ignorando a existência de dois subconstrutos diferentes. Segundo Romanatto (1997, p. 70), "[...] o que distingue taxa de razões é que as taxas podem ser adicionadas, subtraídas enquanto as razões não o são".

Outro autor que distingue razão de taxa é Gimenez (1988, apud Romanatto, 1997, p. 72). Para esse autor, que analisa as interpretações de frações associadas a problemas estáticos e dinâmicos, a razão, quando associada a problemas estáticos, assume a idéia de comparação (exemplo: *João tem três quartos de dinheiro mais que José*), mas quando associada a problemas dinâmicos, assume a idéia de proporção (exemplo: *compro quatro, porém pago três*). Da mesma forma a taxa pode estar relacionada a problemas estáticos (idéia de fator, como por exemplo: *percorro 3 quilômetros a cada 40 minutos*) ou a problemas dinâmicos (exemplo: *o preço de 5 lápis equivale ao preço de 3 canetas*).

A análise realizada nos livros didáticos evidenciou tanto um tratamento superficial do subconstruto razão de um número racional quanto uma confusão entre este e o subconstruto taxa de um número racional. Mais uma vez cabe ao professor aprofundar-se nesses conceitos e estabelecer as correlações necessárias.

O subconstruto decimal do número racional

Segundo Behr et al. (1983), o subconstruto decimal do número racional enfatiza as propriedades desse tipo de número, na sua representação decimal, associadas ao sistema de numeração decimal. Por exemplo, nesse subconstruto, *um décimo* não estaria necessariamente associado à representação fracionária 1/10, mas seria decorrente do valor posicional, representando, dessa forma, um valor dez vezes menor que a unidade (0,1).

Nas coleções analisadas, as de Imenes (2001, 2002) e de Pires (1998, 2002) parecem partilhar dessa concepção. Na coleção de Imenes, esse subconstructo é introduzido na 4ª série relacionado ao sistema monetário e às unidades de medida. Apesar da representação fracionária já ter sido introduzida na 3ª série, a representação decimal é explorada, num primeiro momento, sem qualquer vínculo com frações. Somente após a retomada de frações é que a representação decimal é associada à fração decimal. Vale destacar, também, que a porcentagem recebe uma maior ênfase na sua representação decimal, o que não é usual em termos de livro didático, mas bastante utilizado em situações práticas. Na 5ª e na 6ª séries, o autor mantém essa concepção, fazendo retomadas desse subconstruto.

Na coleção de Pires (1998, 2002), a representação decimal é introduzida na 3ª série, sob a denominação "números com vírgula", e explorada por meio da calculadora. Ainda nessa série, num momento posterior, a representação decimal é relacionada com a fração decimal. Na 4ª série, o assunto é retomado com a denominação "números com vírgula" (capítulo 7) e, nas orientações contidas no *Manual do professor*, há uma explicação sobre o número decimal como um subconstruto próprio dos números racionais. Na 5ª série, essa ênfase permanece, mas há uma ampliação, ao relacionar a representação decimal com a divisão entre dois números inteiros. Na 6ª série (módulo 4), a ênfase se dá no decimal como um subconstruto, com a manutenção das regras do Sistema de Numeração Decimal. Assim, nessa obra, os decimais ora são tratados como um subconstruto do número racional, com características do sistema de numeração decimal, ora como uma fração pertencendo ao subconstruto quociente.

Na coleção de Bigode (2000) não identificamos a exploração do número decimal como um subconstruto dos racionais, o qual aparece sempre relacionado à fração.

A análise dos livros didáticos revelou não haver um consenso entre os autores sobre a importância desse subconstruto. Entendemos que, pelo fato de utilizarmos no contexto brasileiro sistemas de medidas e sistema monetário em bases decimais, esse subconstruto deveria ser amplamente trabalhado no ensino fundamental, até mesmo precedendo o estudo dos números racionais na sua representação fracionária, como pudemos observar nas coleções de Imenes e Pires.

O subconstruto operador

Esse subconstruto está relacionado à idéia de função, como uma transformação. Trata-se da noção *amplia–encolhe*. Segundo Behr et al. (1983, p. 96), esse subconstruto impõe ao número racional p/q uma interpretação algébrica, significando uma função que, quando aplicada em figuras geométricas, transforma-as em figuras semelhantes, e, quando aplicada a um conjunto discreto, atua como um multiplicador–divisor.

Este subconstruto é importante para o estudo da equivalência de frações – "encontrar a máquina função que ajuste as mesmas transformações de entrada e saída" (p. 96) – e de multiplicação de frações, envolvendo a composição de funções.

Nas coleções analisadas, tal subconstruto aparece definido apenas no *Manual do professor*. Na coleção de Pires este é definido no volume da 3ª série (p. 39), no qual se informa ao professor que o mesmo não será trabalhado nesse ciclo. Na 4ª série, essa definição é retomada, também no *Manual*, na apresentação dos diferentes significados e representações do número racional, ou seja, "Operador: quando a fração desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica" (p. 30). Novamente, o professor é informado de que essa interpretação para número racional será trabalhada nos ciclos posteriores – o que não ocorre de 5ª a 8ª série.

Bigode (2000) também define esse subconstruto no *Manual do professor* da 6ª série (p. 27). Este autor utiliza-se dos significados de frações discutidos por Joaquim Gimenez: como uma função ou como operador numérico.

No entanto, tanto na coleção de Pires quanto na de Bigode, o subconstruto operador não é discutido com o aluno em série alguma.

Na coleção de Imenes não há referências a esse subconstruto. Identificamos um exercício, na 6ª série (2002, p. 72), que traz implicitamente a noção de operador, mas este é transformado, para a sua resolução, na relação parte–todo.

Constatamos, dessa forma, que o subconstruto operador é apenas sugerido no *Manual do professor*, sem apresentação de atividades no livro do aluno, deixando para o professor a elaboração de situações que contemplem o tratamento do número racional como operador.

O número racional como probabilidade: será um outro subconstruto?

Behr et al. (1983) não discutem a probabilidade como um subconstruto do número racional, nem a incluem em outro subconstruto. Identificamos o uso da probabilidade como número racional em Nesher (1985, apud Romanatto, 1997, p. 71), que distingue os conceitos: 1) fração como relação parte–todo; 2) número racional. Nessa segunda conceituação, o número racional pode ser interpretado como: resultado da divisão entre dois números inteiros, razão, operador e probabilidade. Pelo fato de não termos acessado os trabalhos de Nesher, nos apoiaremos apenas nos estudos de Romanatto (1999, p. 44), que afirma: "A relação parte/todo em uma probabilidade deve ser entendida como uma comparação entre chances favoráveis ou necessárias e as chances possíveis". Ainda, segundo Romanatto (1999, p. 44), esse subconstruto possibilitaria o desenvolvimento da relação "entre o possível e o necessário (ou favorável)" e deveria ser explorado no ensino dos números racionais.

Dentre os livros didáticos analisados, apenas o de Pires apresenta o número racional como probabilidade. À página 138, do volume da 5ª série, há a afirmação: "situações como a possibilidade de acontecer um determinado resultado em um jogo também podem ser representadas por uma fração". No *Manual do professor*, dessa mesma série, há a informação de que na interpretação do número como um índice comparativo entre duas quantidades, aquelas que envolvem probabilidade e aquelas que envolvem escalas (p. 39).

Possivelmente, a escassa exploração dessa relação da probabilidade com o número racional seja decorrente tanto da falta de suportes teóricos quanto da recente inclusão da probabilidade no currículo do ensino fundamental.

Sintetizando este item da análise, identificamos nas três coleções a desarticulação, quase geral, entre os diferentes subconstrutos. As únicas articulações encontradas são entre o subconstruto decimal e o quociente.

O papel da linguagem: aspectos formais na apresentação do conceito de racional

Nessa parte da análise pretendemos enfocar os aspectos formais da apresentação do conceito de número racional presentes nas coleções analisadas. Para isso procuramos observar os aspectos da linguagem utilizada pelos autores, no decorrer das séries, identificando que aproximações entre língua materna e linguagem formal são apresentadas por esses para a abordagem do conceito de número racional, chegando à definição formal desse conceito.

Primeiramente, para abordar essa questão, é necessário apontar a perspectiva que estamos usando para os termos fração, fração ordinária e racional. De acordo com Niven (1984, p. 31), fração é um termo usado para *designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador*. Neste sentido, a fração representa uma noção mais ampla, que pode englobar o número racional, cuja definição conduz à idéia de fração ordinária, isto é, a expressão a/d (com a e d inteiros) como representação do número racional.

Etimologicamente, segundo Corbisier (1974), a palavra latina *ratio* remete aos termos gregos *nous* e *logos*. O primeiro termo corresponde ao verbo *noéin* que significa ver, perceber, apreender, refletir e querer dizer. Já o substantivo *logos* apresenta inúmeros sentidos tais como: cômputo, conta, medida, relação, regra, fundamento, fórmula, definição, raciocínio e razão. Com isso, torna-se possível conceber o número racional como uma relação entre grandezas, uma razão.

Analisando inicialmente a coleção de Imenes, o volume da 3ª série apresenta as frações ilustrando-as por figuras, por intermédio de atividades exploratórias que tratam da relação entre grandezas. Nessa etapa, o autor não apresenta a representação escrita da forma fracionária, para somente fazê-lo ao final das atividades, afirmando: "você acabou de conhecer as frações 1/2; 1/6 e 5/6."

Um ponto relevante a ser destacado diz respeito à forma como o autor utiliza a linguagem, com o uso da expressão "fica combinado" em substituição ao formal "define-se". Podemos identificar, de maneira implícita, uma introdução da estrutura axiomática da linguagem formal.

No volume da 4ª série, são retomadas as frações representadas por figuras por meio de atividades que pedem ao aluno que "complete com a escrita ou nome das frações pintadas" para, a seguir, iniciar a nomeação das frações com denominador maior que dez. O autor apresenta a adição mediante o uso das representações fracionárias com denominador igual e de frações equivalentes, sem a preocupação com um tratamento mais formal.

No volume destinado à 5ª série, o autor retoma o que foi tratado acerca das frações anteriormente e conduz a uma abordagem mais formal através da apresentação dos termos "denominador" e "numerador" de uma representação fracionária, propondo ao aluno algumas questões, para que haja uma reflexão acerca destes termos. Ainda não é apresentada nesta série nenhuma definição formal de número racional.

No volume destinado à 6ª série, o autor sugere uma relação entre a representação decimal de um número e a representação fracionária, sem uma preocupação direta com formalizações, permanecendo na 7ª série, no trabalho com as operações envolvendo frações, sem apresentar definições. Nessa fase, o autor inicia um leve delineamento formal apontando as frações como números que *expressam medidas ou o resultado da divisão de dois números inteiros*, sem mencionar o termo racional. O autor propõe aos alunos a noção de número racional ao mencionar que as *frações são um tipo diferente de número*, apontando que o número inteiro pode ser um tipo especial de fração, sem fazer menção à organização dos números em conjuntos. Esse processo de formalização culmina na 8ª série, no momento em que o autor apresenta a definição mais rigorosa em termos da linguagem matemática de número racional, organizando os conjuntos numéricos (N, Z, Q e R).

A forma de abordagem da coleção de Imenes revela um caminho interessante em direção à linguagem formal da matemática pelo uso de uma linguagem mais próxima ao aluno. Parece que o momento adequado para o início do tratamento mais rigoroso das definições deve se dar na 8ª série. Entretanto, algumas questões surgiram durante a análise do material. Por exemplo, quando aborda os números racionais, o autor faz menção ao sentido de frações como uma expressão algébrica, apresentando o número irracional $\pi = C/D$ como um exemplo de fração. Como o aluno poderia interpretar a representação para π, uma vez que não se faz a diferenciação entre fração ordinária e representação fracionária? Será que ele entenderia que a notação para π não seria uma fração ordinária, ou pensaria existir um paradoxo? Nossa experiência como docentes de Matemática tem nos revelado que muitas vezes os alunos apresentam um estranhamento diante da representação do π como uma fração.

O encaminhamento dado pelo autor para o conceito de número racional, do ponto de vista da linguagem, leva-nos a refletir que o tratamento matemático do número racional na 8ª série pudesse ser considerado o início de um processo de reflexão formal sobre o conceito, o que demandaria uma continuidade no ciclo posterior. Em conseqüência, entendemos que o tratamento das frações não deveria ser considerado como esgotado no ensino fundamental.

Analisando a coleção de Pires, identificamos que, no volume da 5ª série, a autora usa uma terminologia acerca de conjuntos naturais e racionais, introduzindo os termos "fração" e "fracionar" como se estes fizessem parte do conhecimento lexical do aluno. Já nesta série existe uma tentativa de formalização, quando se aponta que *os números racionais são assim denominados porque exprimem a razão (ou quociente) entre dois números naturais*.

Entendemos que o modo como a autora aborda a questão sugere ter sido sua intenção atrelar a representação fracionária à noção de medida. Entretanto, não é conveniente apresentar o quociente entre dois números naturais como a denominação de números racionais, já que apresenta um erro de definição. Essa questão parece apontar uma preocupação da autora em já apresentar uma definição, tal como a estrutura axiomática da matemática condiciona.

Identificamos que não há menção à fração ordinária ou a outros tipos de frações enquanto expressões algébricas. Na 7ª série, há a seguinte definição: "(...) os números racionais podem ser expressos de infinitas maneiras, na forma fracionária, na forma decimal..." (p. 9). Além da falta de clareza nessa definição, podendo gerar uma ambigüidade (o que se entende por infinitas maneiras? As possibilidades de se representar é que seriam infinitas?), não há retomada da definição apresentada na 5ª série, que considerava o número racional apenas como o quociente entre dois números naturais. No material da 8ª série não há menção à diferenciação das definições dadas na 5ª e 7ª séries para o número racional, e nem às frações ordinárias. Pensamos que esta fase da escolarização seria o momento de se pontuar e fazer as considerações necessárias a respeito das frações em sua relação com os números racionais, isto é, apresentar a diferenciação entre fração algébrica e fração ordinária.

Na coleção de Bigode, no volume destinado à 6ª série, o autor indica que utilizará a noção do latim de *ratio* como distribuição, afirmando que "[...] ...o resultado da divisão é chamado de número racional" (p. 68). Embora haja uma tentativa de definição, ela nos permitiria concluir que a expressão $\pi/\sqrt{3}$ produziria como resultado um número racional. Percebe-se uma intenção do autor em apresentar de imediato uma definição para número racional, embora as situações propostas caminhem num sentido mais exploratório.

Apesar dessa abordagem, o autor parece estar preso a uma necessidade de definição. Ao trabalhar na 6ª série com o campo numérico dos números inteiros, percebemos uma precipitação deste em definir, nesse momento, o número racional. Talvez fosse interessante que o autor, mais adiante, retomasse essa questão, a qual permitiria ao aluno ampliar o conceito de representação fracionária. Entretanto, não conseguimos verificar essa preocupação até o final da coleção. O autor não retoma a questão da distinção entre frações ordinárias e frações algébricas, uma ampliação que acreditamos ser necessária.

No volume destinado à 8ª série, o autor utiliza as noções referentes à teoria dos conjuntos e aborda os números racionais tomando por base a questão de medida. Na página 25, o autor define e enuncia simbolicamente o conjunto dos números racionais: $Q=\{a/b/\ a,b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$

Nessa coleção, observamos que, apesar do desenvolvimento de um processo mais exploratório para o conceito de número racional, do ponto de vista da linguagem, o autor apresenta uma tendência ao rigor matemático quando traz definições já no início do processo.

Diante da análise desenvolvida, um questionamento surge quanto ao momento e a forma de introduzir a linguagem formal simbólica. Sobre esse ponto, Behr et al. (1983) apresentam como questão: quais conexões significativas existem entre os processos intuitivos (no caso do uso de materiais manipulativos) e o simbolismo matemático? Concordamos com os autores quando ressaltam a importância de o aluno expor oralmente sentenças matemáticas, visto que, trabalhar com a oralidade do aluno pode conduzir a uma possível formalização.

Na verdade, ainda são necessários estudos que explorem mais essa relação entre língua materna e linguagem formal matemática. Essa seção se propôs a levantar alguns aspectos dessa relação na construção e representação do conceito de número racional. Identificamos, por um lado, a tentativa dos autores em apresentar uma aproximação da linguagem do aluno e, por outro, uma tendência ao rigor matemático já no início do processo, no caso das coleções de Pires e Bigode. A coleção de Imenes, por sua vez, não mostrou essa tendência, apresentando uma abordagem formal apenas na 8ª série, o que nos faz concluir sobre a necessidade de uma continuidade desse tratamento formal para os números racionais no ciclo posterior.

O papel dos materiais manipulativos no desenvolvimento dos subconstrutos dos números racionais

A utilização de materiais de manipulação para o desenvolvimento dos subconstrutos dos números racionais é apontada por Behr et al. (1983, p. 121) como um importante recurso para a simulação de situações de resolução de problemas do mundo real. Os pesquisadores discutem que esse tipo de "ajuda manipulativa", como eles tratam os materiais de manipulação, tem sido utilizada de maneira restrita para a aprendizagem inicial ou retenção a curto prazo, necessitando de novas pesquisas que investiguem o papel da manipulação de materiais na modelação de situações-problema do mundo real. Neste sentido, apontam:

> *Os materiais manipulativos estão em um intermediário entre as situações-problema do mundo real e o mundo das idéias abstratas e dos símbolos escritos. Eles são símbolos pelo fato de que podem ser usados para representar várias situações diferentes de mundo real; e são concretos, pelo fato de que envolvem materiais reais.* (p. 122)

Na pesquisa realizada em Behr et al. (1983), os materiais manipulativos merecem destaque por facilitar a aquisição e o uso de conceitos de número racional, quando ressaltam a compreensão das crianças ao passar de situações concretas para situações abstratas. Apontam ainda as análises psicológicas que mostram a manipulação como uma componente principal no desenvolvimento de sistemas representacionais e a habilidade em fazer traduções entre os vários sistemas de representação como forma de tornar as idéias mais significativas para as crianças. Segundo Behr et al. (1983), os materiais manipulativos oferecem um mecanismo capaz de libertar o processo de pensamento das crianças, visto que a compreensão de uma situação particular em uma seqüência de atividades com materiais manipulativos pode contribuir para uma contínua reconstrução das condições do problema e pode permitir uma dinâmica de interação entre a resolução e as condições do problema. Enfatizam que, na pesquisa realizada, a meta era identificar atividades manipulativas que usassem materiais concretos cujas estruturas se ajustassem à estrutura de um particular subconstruto de número racional que estava sendo ensinado (p. 103)

Post (1981) refere-se a essa relação de simulação entre o material manipulativo e o conceito matemático como isomórfica, na qual seria possível trabalhar no sistema mais simples ou mais adequado (material manipulativo) e transferir todas as conclusões ao sistema menos acessível, simbólico (conceito matemático abstrato). Isso só é possível se a estrutura de ambos sistemas se mantiver. Na verdade, os materiais de manipulação podem ser vistos como estruturas isomórficas, representando as noções matemáticas mais abstratas que se deseja que as crianças aprendam. A manutenção da estrutura é a base para a seleção do material a ser utilizado. Entretanto, Post (1981) ressalta que:

> *Na realidade, isomorfismos completos nunca existem realmente entre um conceito abstrato e um conjunto de materiais físicos ou uma situação real. O isomorfismo parcial se aproxima do conceito tanto quanto a estrutura mais acessível seja útil no ensino desse conceito. O fato de alguns conjuntos de materiais de manipulação serem melhores que outros para ensinar determinados conceitos comprova isso.* (p. 3)

O importante é garantir, na seleção do material, um conhecimento quanto às limitações e possibilidades de cada tipo.

De maneira geral, as três coleções pouco contemplam a perspectiva de uso de material de manipulação no desenvolvimento dos subconstrutos de números racionais, visto que são coleções mais recentes, da década de 90, e as pesquisas, tanto psicológicas quanto metodológicas que defendem o uso de materiais de manipulação e jogos no desenvolvimento de conceitos, receberam maior destaque nas décadas de 70 e 80. Acreditamos que os autores das coleções pesquisadas não desconhecem os estudos existentes sobre os materiais manipulativos, uma vez que os mesmos trazem no *Manual do Professor* recomendações para que sejam usados pelos professores jogos, quebra-cabeças, dobraduras, calculadoras, computadores e tecnologias afins. Entretanto, poucas orientações são fornecidas quanto a esse uso.

Dentre as três coleções analisadas, destacamos a coleção de Bigode como a que apresenta um maior uso de materiais de manipulação para o desenvolvimento dos subconstrutos de números racionais, seguido da coleção de Imenes e, por último, da coleção de Pires, que faz pouca referência à utilização de materiais manipulativos, principalmente nos volumes de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental.

Considerando os aspectos apontados pela pesquisa de Behr et al. (1983) e Post (1981), selecionamos alguns critérios de análise das coleções de livros didáticos investigadas nesta pesquisa.

O primeiro critério de análise diz respeito à possibilidade de relação isomórfica existente entre os materiais manipulativos sugeridos nos livros didáticos e os subconstrutos dos números racionais. Na análise processada, acreditamos que nas três coleções de livros a forma de abordagem proposta para o trabalho com o material manipulativo respeita essa relação de isomorfismo.

Por exemplo, na coleção de Bigode é proposto no volume da 5ª série o trabalho com o subconstruto parte–todo e medida, a partir do quebra-cabeça tangram. A proposta de atividades a serem desenvolvidas prevê o desenvolvimento de composições e decomposições das figuras do quebra-cabeça. A relação de isomorfismo é, então, definida pela composição e decomposição das peças do tangram em que as relações parte–todo e medidas (área) são estabelecidas. O próprio manual do professor ressalta a importância do desenvolvimento de atividades de composição e decomposição com tangrans e pentaminós como preparação para as idéias relacionadas a frações. Além disso, o autor transcende os limites impostos pelo material do tangram, quando sugere: "Não é possível formar o triângulo grande com o quadrado, mas é possível medir o triângulo grande com o quadrado" (p. 188). O autor parte de uma impossibilidade no tangram para gerar a necessidade da fração (obstáculo criado pelo material, no caso da medida).

> *Os inteiros que conhecemos dão conta de representar quantas vezes o quadrado do tangran cabe no triângulo grande, mas não são suficientes para representar quantas vezes o quadrado cabe no triângulo pequeno.* (p. 189)

Na coleção de Pires no volume da 5ª série, é proposto o trabalho com as frações na forma decimal através da manipulação da calculadora básica. Notamos, também aqui, a presença da relação de isomorfismo, na medida em que as operações com decimais a serem realizadas na calculadora exigem o estabelecimento da transformação fracionária/número decimal. Desta forma, desenvolve-se o subconstruto decimal do número racional. Similarmente, nas outras duas coleções, as atividades com os números decimais são desencadeadas com a manipulação da calculadora básica.

Na coleção de Imenes, no volume destinado à 6ª série, propõe-se o trabalho com possibilidades e estatística valendo-se da manipulação de jogos com dados. Desta forma, estabelece-se uma relação de isomorfismo entre o jogo de dados, cuja estrutura subjacente é o cálculo de probabilidades e chances, e o subconstruto razão de um número racional, medida desta chance. Similarmente, Pires, no volume da 3ª série, e Bigode, no volume da 7ª série, propõem o trabalho com probabilidades a partir do lançamento de dados e moedas.

As atividades com dobraduras (dobrar ao meio, dobrar em 1/3, dobrar em 1/4, etc.) também são bastante exploradas nas três coleções de livros (Bigode, 5ª série; Pires, 3ª série e Imenes, 5ª série), sempre no desenvolvimento do subconstruto parte–todo e medida (equivalência de área) de um número racional.

O segundo critério de análise procurou investigar se os volumes de 1ª a 6ª séries dos livros didáticos analisados contemplam mais o uso de material manipulativo, visto que a Psicologia (Post, 1981, p. 6) aponta a necessidade desta valorização neste nível escolar.

Notamos que nas três coleções de livros, nos volumes de 3ª a 6ª séries, existe uma prioridade no trabalho com os materiais manipulativos e representações por meio de desenhos, representação icônica.[5] Na coleção de Bigode, são explorados vários tipos de materiais manipulativos (dobraduras, jogos, recortes, lançamento de dados de diferentes formas e moedas) até o volume da 7ª série. Ressaltamos que em toda a sua coleção (volumes de 5ª a 8ª séries) o autor procura sempre explorar o material baseado em seus limites e possibilidades de uso, propiciando desafios para o desenvolvimento dos diversos subconstrutos do número racional. Na coleção de Pires, existe uma prioridade nos volumes de 3ª e 4ª série das representações icônicas e propostas de uso de material de manipulação (dobraduras, dados, tangram, *cuisenaire*, quadriculados e mosaicos). Nos volumes de 5ª a 8ª séries, praticamente não existe o uso de material de manipulação, exceto nos volumes de 5ª e 6ª séries, em que se propõe o uso da calculadora básica e alguns exercícios que sugerem a manipulação de folhas, palitos e dobraduras. Entretanto, ressalte-se que, no manual do professor, a autora sugere que se utilizem novas tecnologias, jogos e materiais manipulativos que não estejam somente nos livros (p. 11). É fato para se pensar onde irá o professor buscar referências destes materiais, senão nos poucos livros didáticos que ainda exploram este tipo de material. Finalmente, na coleção de Imenes, notamos uma prioridade no uso de materiais manipulativos e representações icônicas nos livros de 3ª a 6ª séries, os quais exploram bastante o uso de calculadoras, jogos, dobraduras e recortes. Ressalte-se que, nessa coleção de livros, todo o material sugerido (jogos, recortes, etc.) encontra-se disponível para os alunos, como um encarte no final de cada volume, facilitando o trabalho do professor. Além disso, no manual do professor existe uma ampla bibliografia sugerindo periódicos e publicações diversos destinados a auxiliar o professor no desenvolvimento do trabalho com materiais de manipulação propostos.

Finalmente, como terceiro critério, investigamos se existe uma preocupação nos livros didáticos com a variabilidade de materiais a fim de estimular a generalização conceitual e a busca de regularidades (Post, 1981, p. 8). Desta forma, pretende-se evitar o "objeto protótipo", a fim de que o aluno não pense ser possível só desenvolver o conceito em um único objeto.

Também para esse critério, observamos que nas três coleções de livros os autores procuram estabelecer essa variabilidade mediante a exploração de diferentes materiais nos vários exercícios propostos e na introdução de novos conteúdos. Por exemplo, na coleção de Pires há a exploração do subconstruto de número racional parte–todo e medida valendo-se da exploração do tangram, do *cuisenaire*, da fita métrica e das dobraduras, na mesma perspectiva e em diferentes atividades. Da mesma forma, Bigode explora o tangram de diferentes formas e em momentos variados (conceitualização do subconstruto parte–todo e medida, operações com frações, etc.). Finalmente, a coleção de Imenes explora os subconstrutos dos números racionais, variando os materiais propostos nos diferentes exercícios e problemas.

Portanto, considerando a análise processada nas três coleções, identificamos uma reduzida abordagem de uso de materiais de manipulação no desenvolvimento dos subconstrutos de números racionais, embora tal abordagem seja vinculada a uma perspectiva adequada de desenvolvimento das atividades, coerente com a proposta pedagógica de cada autor e vinculada a uma perspectiva de resolução de problemas. Contudo, é fato para se considerar que as pesquisas que contemplam o uso de materiais de manipulação e jogos no ensino da matemática necessitam ser ampliadas, visto que, segundo Behr et al. (1983):

> *Embora seja freqüentemente recomendado que as crianças aprenderiam as idéias matemáticas com o auxílio do material concreto manipulativo, muito pouco se sabe sobre como o auxílio do manipulativo influencia no pensamento matemático da criança ou no desenvolvimento conceitual. Um número considerável de pesquisas (Fennema, 1972; Gerling; Wood, 1976; Kieren, 1969; Suydam; Higgins, 1977) tem fornecido evidências de que o uso de materiais manipulativos facilita a aprendizagem de habilidades matemáticas, conceitos e fundamentos.[...] A literatura contém pouca informação sobre como os materiais manipulativos auxiliam de fato no funcionamento cognitivo das crianças ou por que seu uso facilita ou não a aprendizagem matemática.* (p. 108)

Questões para se pensar sobre a abordagem dos racionais

O presente estudo suscitou muitas dúvidas e inquietações, que merecem novas pesquisas. Uma dessas dúvidas diz respeito à amplitude conceitual do número racional. Nesse sentido, Romanatto (1997, p. 101) propõe que o número racional seja visto como uma teia de relações e que o trabalho pedagógico ocorra em situações contextualizadas – condições para que o aluno possa compreender tal amplitude e distinguir os diferentes significados com que esse tipo de número possa se manifestar. A verdadeira significação do conceito de número racional passa, pois, por um trabalho pedagógico que contemple os diferentes contextos nos quais tal conceito se faça presente. A forma fragmentada com que esse conceito vem sendo apresentado ao aluno, bem como a pouca ênfase na utilização de materiais manipulativos dificilmente contribuirão para a sua compreensão.

Outra questão diz respeito ao momento em que todos os subconstrutos devem ser apresentados ao aluno. O trabalho deve ser gradativo? Ou sempre que possível, serem apresentados dois ou mais subconstrutos para que o aluno possa ir diferenciando um contexto de outro? É possível dar conta de explorar todos os sete subconstrutos até a 8ª série, ou este é um tema que poderia ser trabalhado no ensino médio? Quais dos subconstrutos deveriam ser privilegiados no ensino fundamental? Essas questões apontam para o fato de que o trabalho com números racionais, começando com os aspectos experimentais até os formais, não se esgota no ciclo do ensino fundamental, não podendo ser considerado, no ensino médio e superior, como um objetivo já atingido.

Ainda, outra questão merece reflexão, e diz respeito ao uso de materiais manipulativos. Os educadores matemáticos consideram ou não sua importância no ensino de números racionais? Quais as razões de tão pouca exploração nos livros didáticos analisados? É suficiente colocar no *Manual do professor* a importância de tal utilização? Ou o próprio livro do aluno deve conter atividades que exijam a manipulação de objetos e não apenas o desenho?

A análise realizada nos livros didáticos evidenciou o papel fundamental do professor no estabelecimento de conexões entre o experimental e o formal, entre os diferentes subconstrutos, entre a língua materna e a linguagem matemática, exigindo constantes sistematizações e/ou interpretações das definições apresentadas. Estaria o professor preparado para tal atribuição? Os cursos de formação – tanto a inicial quanto a continuada – vêm discutindo questões dessa natureza? A pesquisa apontou para a necessidade de discussões epistemológicas nos espaços de formação, que vão além das simples questões conceituais.

Nesse sentido, Moreira e David (2004), ao analisarem a forma como o curso de Licenciatura em Matemática da UFMG aborda a questão dos números racionais, apontam a desarticulação desta formação inicial com as exigências da prática docente. Os autores concluem que a matemática acadêmica, além de não ser suficiente para a sistematização da matemática escolar, mostra-se inadequada.

> *A formação matemática na licenciatura se desenvolve orientada pelos valores conceituais e estéticos da Matemática acadêmica, assegurando, assim, em tese, um estatuto de formação teórico-científica. A articulação do processo de formação na licenciatura com a prática escolar é, então, concebida como uma tarefa a ser*

executada essencialmente fora do espaço da formação matemática. (Moreira; David, 2004, p. 17)

Os autores sugerem que uma articulação mais adequada do processo de formação do professor com a prática docente deveria ter como referência *a Matemática na sua condição de disciplina escolar*. O conhecimento matemático a ser trabalhado na licenciatura deixaria de ser como um conhecimento "dado" para ser problematizado, transformando-se em objeto de investigação e análise.

Temos clareza de que não esgotamos as discussões. As questões aqui tematizadas não dão conta da complexidade do assunto. Esse, sem dúvida, é um campo que necessita de mais investigações.

Notas

[1] Uma primeira versão deste trabalho foi apresentada no VIII ENEM, em Recife, em julho de 2004.

[2] Entendem-se por construto as elaborações e sistematizações conceituais, com base em dados simples. Subconstrutos seriam as idéias que compõem um determinado construto. No presente estudo, o construto em evidência é "número racional" e os subconstrutos são as diferentes idéias ou "personalidades" que o número racional assume.

[3] Para as obras com mais de um autor, como há mudanças de parceria de um nível de ensino para outro, utilizaremos como referência o autor comum. Assim, ao nos referirmos a Imenes subentende-se: Imenes, Jakubo e Lellis de 1ª a 4ª séries e Imenes e Lellis, de 5ª a 8ª séries. De maneira análoga, para Pires subentende-se: Pires e Nunes de 1ª a 4ª séries e Pires, Curi e Pietropaolo, de 5ª a 8ª séries.

[4] Por quantidades discretas entendemos aquelas passíveis de contagem, como, por exemplo: número de alunos, de fichas, etc. Por quantidades contínuas, aquelas que envolvem medidas de comprimento, área e volume.

[5] Representação icônica, segundo Bruner, corresponde ao uso de meios visuais de representação: filmes, desenhos, etc. (Post, 1981, p. 11).

Referências

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.; SILVER, Edward A. Rational-Number Concepts. In: LESH, Richard; LANDAU, Marsha (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

CORBISIER, Roland. *Enciclopédia filosófica*. Petrópolis (RJ): Vozes, 1974.

DAVID, Manuela M. S.; FONSECA, Maria da Conceição. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. *Presença pedagógica*, Belo Horizonte: Dimensão, v. 3, n. 14, p. 55-67, mar./abr. 1997.

IMENES, Luis Marcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática para todos*. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, Luis Marcio; JAKUBO, José Jakubovic; LELLIS, Marcelo. *Novo tempo*: matemática. São Paulo: Scipione, 2001.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). *Number and measurement*: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

KIEREN, T. E. *Five faces of mathematical knowledge building*. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Albert, 1981.

MOREIRA, Plínio C.; DAVID, Maria Manuela M. S. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro: Unesp, ano 17, n. 21, p. 1-19, 2004.

NIVEN, Ivan. *Números*: racionais e irracionais. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

PIRES, Célia Carolino; NUNES, Maria. *Matemática no planeta azul*. São Paulo: FTD, 1998.

PIRES, Célia Carolino; CURY, Edda; PIETROPAOLO, Ruy. *Educação matemática*. São Paulo: Atual, 2002.

POST, Thomas R. O papel dos materiais de manipulação no aprendizado de conceitos matemáticos. In: LINDQUIST, Mary Montgomery. *Selected issues in mathematics education*. Tradução: Elenisa T. Curti e Maria do Carmo Mendonça, 1981. Mimeografado.

ROMANATTO, Mauro C. *Número racional*: relações necessárias a sua compreensão. 1997. 158 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

______. Número Racional: uma teia de relações. *Zetetiké*. Cempem – FE/Unicamp, v. 7, n. 12, p. 37-49, jul./dez. 1999.

Sobre os autores:

NEPEM: Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Educação Matemática, vinculado ao Programa de Mestrado em Educação da Universidade São Francisco, Itatiba/SP, é composto por alunos da graduação e da pós-graduação, professores escolares e professores da USF.